



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y  
AGRIMENSURA

INSTITUTO DE ESTUDIOS NUCLEARES Y RADIACIONES IONIZANTES

---

# Determinación de la vida media y la energía de decaimiento de neutrones en núcleos atómicos.

---

*Autor:*

Alan Cruz DASSIE

[dassiealan@gmail.com](mailto:dassiealan@gmail.com)

*Profesor a cargo:*

Dr. Rodolfo ID BETAN

1 de abril de 2019

## Resumen

Una manera de obtener los estados ligados y las resonancias para un sistema cuántico es mediante los polos complejos de la matriz de dispersión  $S$ . En el presente trabajo se caracteriza el núcleo pesado  $^{209}\text{Pb}$  a través de la búsqueda de polos complejos de la matriz  $S$  construida con los coeficientes de transmisión en el caso del pozo de potencial y la barrera de potencial.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. El Hamiltoniano y sus autovalores para el pozo de potencial</b>	<b>2</b>
<b>3. El Hamiltoniano y sus autovalores para la barrera de potencial</b>	<b>4</b>
<b>4. Búsqueda de polos de la matriz S</b>	<b>5</b>
4.1. Pozo de potencial . . . . .	5
4.2. Barrera de potencial . . . . .	5
<b>5. Resultados y Discusiones</b>	<b>6</b>
5.1. Pozo de potencial . . . . .	6
5.2. Barrera de potencial . . . . .	7
<b>6. Conclusión</b>	<b>9</b>

# 1. Introducción

El fenómeno de resonancia ha sido estudiado extensivamente en la física. Aparece en casi todos los campos de la física, desde la mecánica clásica hasta la mecánica cuántica. En esta última, tiene particular importancia en los nano-dispositivos, los cuales siempre son sistemas abiertos con estados de resonancia, esto es: un electrón ingresa en el dispositivo y es atrapado por un potencial por un dado tiempo (que llamaremos *tiempo de vida medio*), y luego sale.

La matriz de scattering (matriz  $S$ ) es un operador que transforma el estado inicial, es decir, el momento de incidencia de las partículas, con el estado final, es decir, el momento cuando las partículas salen luego de la interacción con el núcleo [1]. Los elementos de esta matriz  $S$  son funciones que dependen de  $k(E) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$ , las cuales son caracterizadas en función de sus polos complejos. Estas funciones son los coeficientes de transmisión  $T$  y reflexión  $R$ .

El significado físico de estos polos de la matriz  $S$ , responden a los observables: la sección eficaz, los niveles de energía para los estados ligados, y el tiempo de vida medio y energía de decaimiento para las resonancias. En la sección 4 se presenta la relación entre los polos y estos valores físicos.

El objetivo principal de este trabajo es obtener los polos de la matriz  $S$  para el pozo de potencial y la barrera de potencial, utilizando parámetros del núcleo pesado  $^{209}\text{Pb}$ . Para esto, se obtienen los coeficientes de transmisión para ambos casos. Luego, se analizan que polos corresponden a estados ligados y cuales de ellos a resonancias.

# 2. El Hamiltoniano y sus autovalores para el pozo de potencial

Consideremos el Hamiltoniano en una dimensión de forma general

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{\mathcal{V}} \quad (1)$$

donde en el caso de una dimensión

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \\ \hat{\mathcal{V}} &= V(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Asumiendo que el potencial es el que corresponde al pozo, este presenta un soporte acotado

$$\Omega_{\text{Pozo}} = \{x : 0 \leq x \leq r\} \quad (3)$$

con  $r > 0$  y dentro del cual el potencial tiene la forma de  $V(x) = -V_0$  y fuera es nulo. Claramente, este operador es hermítico.

La ecuación de autovalores y autovectores a resolver entonces es

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{\Psi} = E\hat{\Psi} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\hat{\Psi}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\hat{\Psi}(x) = 0 \quad (5)$$

Como solución a esta ecuación diferencial, proponemos

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x < 0 \\ Ce^{i\kappa x} + De^{-i\kappa x} & \text{si } 0 < x < r \\ Fe^{ikx} & \text{si } x > r \end{cases} \quad (6)$$

donde

$$k(E) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot E} \quad (7)$$

$$\kappa(E, V_0) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E + V_0)}$$

Para obtener las constantes de la función de onda  $\hat{\Psi}(x)$ , debemos utilizar las condiciones de contorno. Estas son:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(0^+) &= \hat{\Psi}(0^-) \\ \hat{\Psi}(r^+) &= \hat{\Psi}(r^-) \\ \hat{\Psi}'(0^+) &= \hat{\Psi}'(0^-) \\ \hat{\Psi}'(r^+) &= \hat{\Psi}'(r^-) \end{aligned} \quad (8)$$

En el sistema de ecuaciones entonces, tenemos 5 incógnitas y 4 ecuaciones. Escribimos entonces cada una de las constantes en función de  $A$ , que representará a la partícula incidente sobre el pozo de potencial.

A partir de la función de onda  $\hat{\Psi}(x)$  planteada en la ecuación 6, se definen los coeficientes de transmisión  $T(k, \kappa)$  y reflexión  $R(k, \kappa)$  como:

$$\begin{aligned} T(k, \kappa) &= \left| \frac{F}{A} \right| \\ R(k, \kappa) &= \left| \frac{B}{A} \right| \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto, si resolvemos el sistema de ecuaciones que se presenta al aplicar las condiciones de contorno de (8), obtenemos:

$$\begin{aligned} T(k, \kappa) &= \frac{16(k\kappa)^2}{16(k\kappa)^2 + 4(k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(\kappa r)} \\ R(k, \kappa) &= \frac{4(k^2 - \kappa^2)^2}{4(k^2 - \kappa^2)^2 + 16(k\kappa)^2 \csc^2(\kappa r)} \end{aligned} \quad (10)$$

Observemos que podemos reescribir  $\kappa(E, V_0)$  en función de  $k(E)$  tal que

$$\kappa^2(E, V_0) = k^2(E) + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V_0 \quad (11)$$

A partir de esto, escribimos el coeficientes de transmisión en función de  $k(E)$  y  $V_0$ .

$$T(k, V_0) = \left[ 1 + \left( \frac{m \cdot V_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\sin \left[ \left( k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \right)^{1/2} \cdot r \right]}{k^2 \cdot \left( k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \right)} \right]^{-1} \quad (12)$$

donde  $k$  es un número complejo.

### 3. El Hamiltoniano y sus autovalores para la barrera de potencial

Partimos nuevamente del Hamiltoniano presentado en la ecuación (1), donde ahora el potencial, cuyo soporte es el mismo que en la ecuación (3), tiene la forma de  $V(x) = V_0$ .

Bajo esta condición, las soluciones propuestas a la ecuación diferencial serían las mismas que en la ecuación (6), cuya diferencia radica en el valor de  $\kappa$ , pues en este caso vale

$$\kappa(E, V_0) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - V_0)} \quad (13)$$

Pese a esto, el coeficiente de transmisión es el mismo que el definido en la ecuación (10), pero en este caso debemos distinguir dos situaciones dependiendo de la energía.

Caso  $E > V_0$

En el caso que nos encontremos por sobre la barrera,  $\kappa$  es real. Si lo escribimos en función de  $k$ , esto es

$$\kappa^2(E, V_0) = k^2(E) - \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V_0 \quad (14)$$

la expresión del coeficiente de transmisión, modificando la ecuación (12), queda

$$T(k, V_0) = \left[ 1 + \left( \frac{m \cdot V_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\sin \left[ \left( k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \right)^{1/2} \cdot r \right]}{k^2 \cdot \left( k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \right)} \right]^{-1} \quad (15)$$

Vemos que es exactamente igual que la ecuación (12), excepto por un signo negativo en el  $V_0$ .

Caso  $E < V_0$

En este caso, donde nos encontramos “dentro” de la barrera, vemos que  $\kappa$  es imaginario. Trabajamos un poco sobre este coeficiente para escribirlo en función de  $k$

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0 < 0 \\ \kappa^2 &= - \left( \frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Si reescribimos ahora el  $\sin$  que aparece en el coeficiente de transmisión de la ecuación (12)

$$\begin{aligned} \sin^2(\kappa r) &= \sin^2 \left[ - \left( \frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2 \right) \cdot r \right] = \\ &= \left[ i \cdot \sinh \left( \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2} \cdot r \right) \right]^2 = \\ &= - \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2} \cdot r \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Entonces, el coeficiente de transmisión en este caso es

$$T(k, V_0) = \left[ 1 + \left( \frac{m \cdot V_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\sinh \left[ \left( \frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2 \right)^{1/2} \cdot r \right]}{k^2 \cdot \left( \frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2 \right)} \right]^{-1} \quad (18)$$

## 4. Búsqueda de polos de la matriz S

### 4.1. Pozo de potencial

Para este caso, los polos de la matriz S son los polos de la ecuación (12). Los polos que son puramente imaginarios, esto es  $k_n = ik_n''$ , son aquellos que asociamos con los estados ligados del sistema. En el espacio de las energías

$$\begin{aligned} E_0 &= E'_0 - i(\Gamma_n/2) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} k_n''^2 \end{aligned} \quad (19)$$

donde entonces  $\Gamma_n = 0$ .

Consideremos ahora el caso donde uno de sus polos se encuentre cercano al origen

$$k_0 = k'_0 + ik''_0, \quad 0 < k'_0 \ll 1/r, \quad k''_0 < 0 \quad (20)$$

La energía compleja de este polo entonces será

$$\begin{aligned} E_0 &= E'_0 - i(\Gamma_0/2) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_0'^2 - k_0''^2) - i \frac{\hbar^2}{m} k_0' k_0'' \end{aligned} \quad (21)$$

donde entonces  $\Gamma_0 \leftarrow 0$  y  $E'_0 > 0$ . Este polo corresponde a un “anti-bound”, el cual afecta únicamente en la sección eficaz del sistema (ver sección 4.2 en [1]).

En cambio, para aquellos polos cuya forma es  $k_n = k'_n + ik''_n$  con  $k'_n > 0$ ,  $k''_n < 0$  y  $k'_n \gg k''_n$ , corresponden a las resonancias. Esto es, si escribimos nuevamente su energía

$$\begin{aligned} E_n &= E'_n - i(\Gamma_n/2) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_n'^2 - k_n''^2) - i \frac{\hbar^2}{m} k_n' k_n'' \end{aligned} \quad (22)$$

El tiempo de vida medio de estas resonancias será entonces[2]

$$\tau_n = \hbar/\Gamma_n \quad (23)$$

con energía de decaimiento  $E'_n$ .

### 4.2. Barrera de potencial

Caso  $E > V_0$

En este caso debemos buscar los polos de la ecuación (15). Siguiendo el mismo análisis realizado en la sección anterior, para este caso sólo tendrán significado físico aquellos que corresponden a las resonancias. Esto es  $k_n = k'_n + ik''_n$  con  $k'_n > 0$ ,  $k''_n < 0$  y  $k'_n \gg k''_n$ . La energía viene dada por la ecuación (22), con energía  $E'_n$ , y en donde en este caso entendemos a la vida media definida en la ecuación (23) como el tiempo que tarda la partícula en atravesar la barrera.

Caso  $E < V_0$

El coeficiente de transmisión que me da los polos de este caso es el de la ecuación (18). En este caso, asociamos el significado físico de los polos con el efecto túnel. Los polos que me definen las energías para las cuales es posible el fenómeno son aquellos que se encuentran en el cuarto cuadrante. Nuevamente, la inversa de  $\Gamma$  se relaciona con el tiempo que tarda la partícula en atravesar la barrera.

## 5. Resultados y Discusiones

Los resultados son en base a los parámetros del núcleo pesado de  $^{209}\text{Pb}$ , el cual presenta la estructura del ya observado  $^{208}\text{Pb}$  con el agregado de un neutrón.

### 5.1. Pozo de potencial

Los parámetros en este caso son

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{-1} &= 0,04801395461 \frac{1}{\text{MeV} \cdot \text{fm}^2} \\ V(x) = -V_0 &= -44,42 \text{MeV} \\ r &= 7,524740 \text{fm} \end{aligned} \tag{24}$$

	$k_n = k'_n + ik''_n$	$E_n = E'_n - i(\Gamma_n/2)$
Estados Ligados	$0 + i1.41718$	$-41.8295 + i0$
	$0 + i1.36738$	$-38.9415 + i0$
	$0 + i1.28074$	$-34.1629 + i0$
	$0 + i1.02377$	$-21.8292 + i0$
	$0 + i0.546246$	$-6.21454 + i0$
Resonancias	$0.753356 - i0.287792$	$10.0954 - i9.03112$
	$1.45015 - i0.331892$	$41.5042 - i20.0481$
	$1.99812 - i0.370047$	$80.3003 - i30.7993$

Tabla 5.1.1: Polos y su equivalente en energía para el pozo de potencial. Unidades:  $[k'_n] = [k''_n] = \frac{1}{\text{fm}}$ ;  $[E'_n] = [\Gamma_n] = \text{MeV}$  para los parámetros de la ecuación (24).

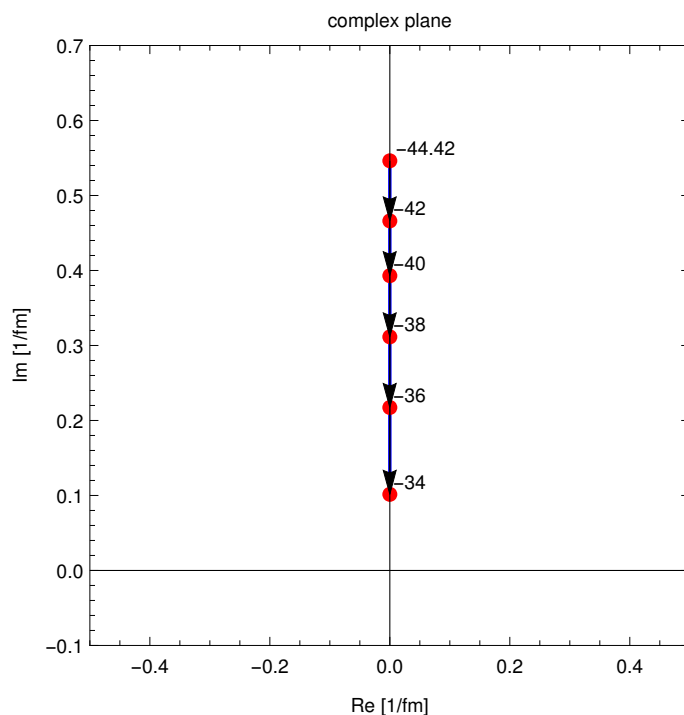


Figura 1: Polo en el espacio de los  $k$  que corresponde al estado fundamental. En el espacio de las energías, corresponde al estado ligado de Energía =  $-41,8295 MeV$ . Los números al lado de cada polo indican la profundidad del pozo en  $MeV$ .

En la tabla (5.1.1) se presentan los polos obtenidos de la ecuación (12) y su representación en el espacio de las energías. Observamos que las resonancias obtenidas, presentan un tiempo de vida media del orden del  $10^{-22}s$  en el mejor de los casos.

En la Figura (1) se presenta el comportamiento del estado fundamental del pozo cuando el tamaño de esta comienza a achicarse. Se observa en este caso que el estado fundamental, cuando se pierde, no se transforma en una resonancia sino en un “anti-bound” (es decir,  $k' = 0$  y  $k'' < 0$ ), afectando entonces a la sección eficaz del sistema únicamente.

En cambio, en la Figura (2) se presenta el comportamiento del primer estado excitado. En este caso, cuando el polo abandona el eje imaginario positivo, se transforma en una resonancia.

## 5.2. Barrera de potencial

Los parámetros en este caso son

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{-1} = 0,04801395461 \frac{1}{MeV \cdot fm^2} \quad (25)$$

$$V(x) = V_0 = 44,42 MeV$$

$$r = 7,524740 fm$$



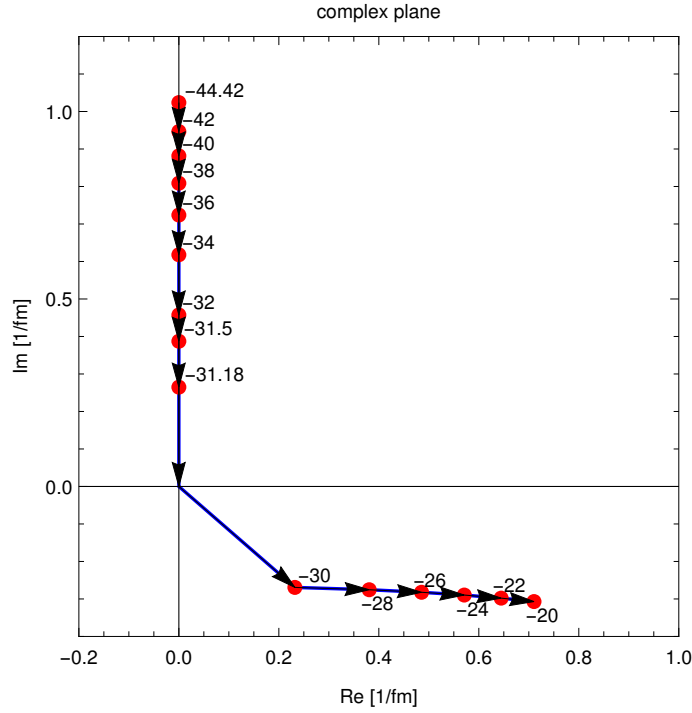


Figura 2: Polo en el espacio de los  $k$  que corresponde al primer estado excitado. En el espacio de las energías, corresponde al estado ligado de Energía =  $-38,9415 MeV$ . Los números al lado de cada polo indican la profundidad del pozo en  $MeV$ .

	$k_n = k'_n + ik''_n$	$E_n = E'_n - i(\Gamma_n/2)$
$E > V_0$	1.51382 - i0.0194711	47.7211 - i1.2278
	1.66662 - i0.069033	57.7508 - i4.79242
	1.89922 - i0.131209	74.7662 - i10.3801
$E < V_0$	0.753356 - i0.287792	10.0954 - i9.03112
	1.45015 - i0.331892	41.5042 - i20.0481
	1.99812 - i0.370047	80.3003 - i30.7993

Tabla 5.2.1: Polos y su equivalente en energía para la barrera de potencial. Unidades:  $[k'_n] = [k''_n] = \frac{1}{fm}$ ;  $[E'_n] = [\Gamma_n] = MeV$  para los parámetros de la ecuación (25)

En la Tabla (5.2.1) se presentan los polos correspondientes a las ecuaciones (15) y (18) y su representación en el espacio de las energías.

La Figura (3) representa el comportamiento del polo correspondiente a la primer resonancia, cuando se comienza a achicar la barrera. Se observa que comienza a achicarse la energía, pero el tiempo de transición dentro de la barrera también disminuye.

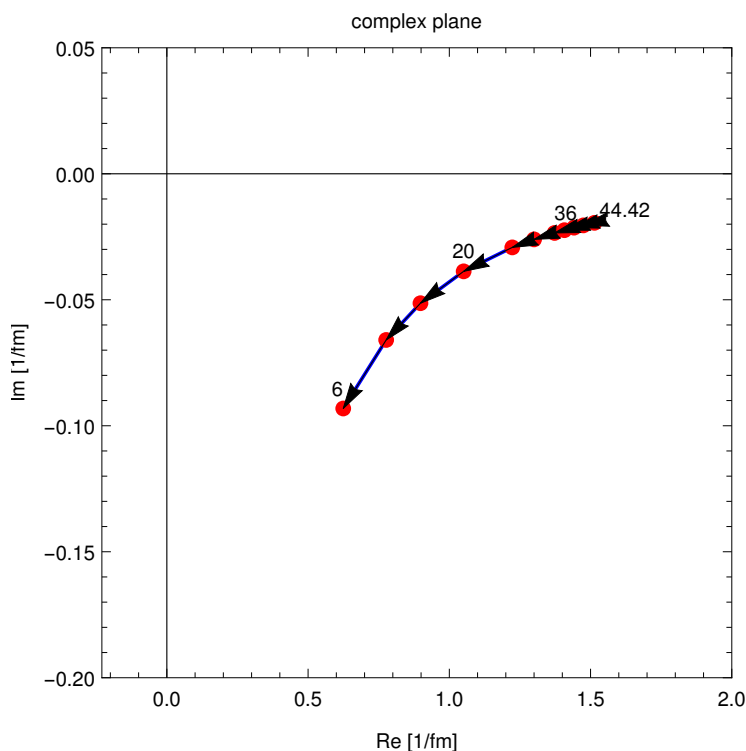


Figura 3: Polo en el espacio de los  $k$  que corresponde a la primera resonancia. En el espacio de las energías, corresponde al estado resonante de Energía =  $47,7211 MeV$  y Tiempo Característico =  $2 \times 10^{-21} s$ . Los números al lado de cada polo indican la altura de la barrera en  $MeV$ .

## 6. Conclusión

Para un núcleo pesado, podemos modelizar al sistema en 1D como un pozo de potencial con barreras a ambos lados. En este trabajo, analizamos al pozo y a la barrera por separado, mientras que existen otros trabajos que analizan el sistema completo, modelizando con deltas de Dirac en lugar de barreras [3].

En el caso del pozo, se obtuvo el coeficiente de transmisión dado por la ecuación (12). Se armó la matriz de dispersión  $S$ , para luego obtener los polos. Si comparamos los valores obtenidos dados en la Tabla (5.1.1) con trabajos donde se hallan los estados ligados mediante la solución de Schrödinger con condiciones de contorno y que utilizaron los mismos parámetros del  $^{209}Pb$ [4], las soluciones coinciden, con discrepancias máximas del orden del 20%. Esta discrepancia, a veces excesiva, se debe al método de búsqueda de polos, ya que se utilizó el software *Mathematica*, que imposibilitaba modificar su algoritmo de funcionamiento.

Además, en el caso de las resonancias, vemos que su vida media es extremadamente baja. Esto se da porque si se considera el pozo solo, es puramente su potencial atractivo lo que atraparía la partícula, donde entonces no estamos teniendo en cuenta el potencial generado por la barrera.

En el caso de la barrera, se modificó el coeficiente de transmisión obtenido para el pozo para energías por debajo de la barrera en función de las ecuaciones (16) y (17), obteniéndose así el coeficiente dado en la ecuación (18). Con esto, se pudieron obtener los polos de la matriz  $S$ ,

en los cuales observamos que el tiempo que tarda la partícula en decaer es considerablemente baja.

## Referencias

- [1] “Causality and dispersion relations”; H. M. Nussenzveig; Academic Press; 1972
- [2] “Theory of Resonances”; V. I. Kukulin, et. al.; Springer Netherlands; 1989
- [3] “Definition and computation of the resonance state in Quantum Mechanics”; Naomichi Hatano, et. al.; 2007
- [4] “Determinación de energías de ligadura y funciones de onda para estados resonantes”; Franco Gerdau; IENRI-UNR; 2019